

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

Emmanuel Gobet

TD 6 - 19 décembre 2025

Exercice 1 (calcul fondamental de la finance de marché). L'objectif est de montrer la formule clé suivante : si Z est une variable gaussienne de moyenne $m - \frac{V}{2}$ et de variance V , alors

$$\mathbb{E}(xe^Z - K)_+ = xe^m \mathcal{N}\left[\frac{1}{\sqrt{V}} \ln(xe^m/K) + \frac{\sqrt{V}}{2}\right] - K \mathcal{N}\left[\frac{1}{\sqrt{V}} \ln(xe^m/K) - \frac{\sqrt{V}}{2}\right].$$

1. En linéarisant le payoff, montrer que

$$\mathbb{E}(xe^Z - K)_+ = x\mathbb{E}(e^Z \mathbf{1}_{xe^Z > K}) - K\mathbb{P}(xe^Z > K).$$

2. Justifier que $\mathbb{P}(xe^Z > K) = \mathcal{N}\left[\frac{1}{\sqrt{V}} \ln(xe^m/K) - \frac{\sqrt{V}}{2}\right]$.
3. Démontrer $\mathbb{E}(e^Z f(Z)) = e^m \mathbb{E}(f(Z + V))$ pour toute fonction f bornée.
4. Conclure.

Exercice 2 (Pricing et couverture d'une option forward start). Une option call forward start avec maturité T et date intermédiaire $\theta \in (0, T)$ paye à maturité le montant $(S_T - S_\theta)^+$. C'est un exemple simple d'*option exotique*.

On suppose pour le sous-jacent S une dynamique de Black-Scholes. On souhaite mettre en place une stratégie de couverture en delta pour l'option forward start, en présence d'un taux d'intérêt r constant.

1. Donner la valeur du portefeuille de couverture V_t lorsque t est dans l'intervalle $(\theta, T]$.
2. Donner la valeur du portefeuille de couverture V_t lorsque t est dans l'intervalle $[0, \theta]$.
3. Calculer le delta du portefeuille. Que se passe-t-il lorsqu'on traverse la date intermédiaire θ ? Commenter sur la faisabilité de la couverture en delta d'une option forward start.

Exercice 3 (Option pay-later). Une option pay-later est un contrat qui verse le payoff d'un call standard, mais qui comporte des frais pour son détenteur à la maturité, au lieu de la date d'entrée dans le contrat. Ces frais sont payés par le détenteur uniquement si la valeur de l'actif sous-jacent à maturité est supérieure au strike. En d'autres termes : l'acheteur de l'option ne paye rien à l'entrée dans le contrat, et doit payer un montant prédéterminé P uniquement si l'option est dans la monnaie à maturité.

On supposera par la suite que le taux d'intérêt sur le marché a une valeur constante r .

1. Donner le payoff de l'option pay-later. En utilisant uniquement des arguments d'absence d'arbitrage, donner le montant P qui doit être chargé à l'acheteur d'une option pay-later à sa maturité. Montrer que P est supérieur au prix de marché d'un call standard.
2. En supposant maintenant un modèle de Black-Scholes pour le sous-jacent sous la mesure historique $\mathbb{P}^{\text{hist}}$,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\text{hist}},$$

donner une stratégie de couverture dynamique autofinancante pour l'option pay-later.